PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA B
12ºAno – Prova 735 – 2ªFase - 2006
(Esta proposta de correcção também pode ser consultada em `www.apm.pt`)

1.

1.1

1.1.1

	Nº. de alunos	
Classificação	Matemática	Informática
16	6	13
17	11	11
18	17	3
19	9	9
20	7	14
Total	50	50

Matemática	Informática
$\overline{x} = 18$	$\overline{x} = 18$
$\sigma = 1{,}2$	$\sigma = 1{,}6$

Confirma-se que as médias das classificações às duas disciplinas são iguais e os desvios padrão são diferentes.

1.1.2 Em Matemática a maioria dos alunos tem classificação igual ao valor médio (18) ou próximo deste (17 ou 19), enquanto que em Informática se verifica que a maioria das classificações são mais afastadas do valor médio (16 ou 20). Logo, o Pedro concluiu que o desvio padrão das classificações em Informática é maior.

1.2. Dos 14 alunos que obtiveram 20 a Informática, 7 obtiveram, também, 20 a Matemática.
Há 16 (9 + 7) alunos com classificação maior ou igual a 19 valores na disciplina de Matemática. Escolhendo um destes alunos ao acaso, a probabilidade de ter 20 nas duas disciplinas é então

$$p = \frac{7}{16}.$$

2

2.1

2.1.1 Número de páginas lidas pela Ana no dia n:

n	a_n
1	1 $\times 2$
2	2
3	4
4	8
5	16
$\vdots$	$\vdots$
n	2^{n-1}

A sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão 2, pelo que a soma dos n primeiros termos é dada pela expressão:

$$S_n = 1 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{1-2^n}{-1} = 2^n - 1.$$

Esta expressão representa o número de páginas que a Ana já leu ao fim de n dias.

Número de páginas lidas pela Fátima no dia n:

$$\begin{array}{c|l} n & f_n \\ \hline 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 9 \\ 5 & 11 \\ \vdots & \vdots \\ n & 2n+1 \end{array}$$

$+2$

A sucessão (f_n) é uma progressão aritmética de razão 2, pelo que a soma dos n primeiros termos, número de páginas lidas pela Fátima ao fim de n dias, é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{3+2n+1}{2} \times n = \frac{4+2n}{2} \times n = (2+n)n = 2n + n^2.$$

2.1.2

n	a_n	Σa_n	f_n	Σf_n
1	1	1	3	3
2	2	3	5	8
3	4	7	7	15
4	8	15	9	24
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	128	255	17	80
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
15			31	255

A Ana demorou 8 dias a ler o livro; a Fátima demorou 15 dias (mais 7 dias do que a Ana). Assim, como a Ana acabou a 18 de Abril, a Fátima terá terminado no dia 25 de Abril $(18+7)$.

2.2 Número de páginas em que o número começa pelo algarismo 2:

$$\left.\begin{array}{cc} \underline{2} & \underline{0} \\ \underline{2} & \underline{1} \\ \vdots & \vdots \\ \underline{2} & \underline{9} \end{array}\right\} \text{10 páginas} \qquad \left.\begin{array}{ccc} \underline{2} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{2} & \underline{0} & \underline{1} \\ \vdots & \vdots & \\ \underline{2} & \underline{5} & \underline{5} \end{array}\right\} \text{56 páginas}$$

Existem, então, 66 páginas nas condições pretendidas. A probabilidade é

$$p = \frac{66}{255} \approx 0,26.$$

R.: A probabilidade pedida é 26%.

3

3.1

3.1.1

$$N(0) = \frac{125A}{A + (125-A)e^{-0,2\times 0}} \Leftrightarrow N(0) = \frac{125A}{A + (125-A)\times 1} \Leftrightarrow N(0) = \frac{125A}{125} \Leftrightarrow N(0) = A.$$

Verifica-se, assim, que o número de aves existente no instante inicial é A.

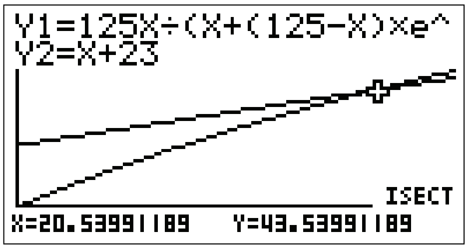
3.2 Ao fim de 5 anos existem mais 23 $(80-57)$ aves do que no instante inicial. Assim, $N(5) = A + 23$, ou seja,

$$\frac{125A}{A + (125-A)e^{-0,2\times 5}} = A + 23 \Leftrightarrow \frac{125A}{A + (125-A)e^{-1}} = A + 23.$$

Inserindo no editor de funções da calculadora as funções

$$Y_1 = \frac{125x}{x + (125 - x) \times e^{-1}} \qquad \text{e} \qquad Y_2 = x + 23$$

e procurando as coordenadas do ponto de intersecção, obtém-se $x \approx 21$:



R.: Estima-se que o número de aves existentes no instante inicial era 21.

3.2 (Outra resolução.)
$80 - 57 = 23$. Então, $N(5) - N(0) = 23$.

Como A é um número inteiro positivo e menor que 25, temos um número finito de possíveis soluções, pelo que poderemos resolver o problema por tentativa e erro.

Se $A = 24$ então,

$$N(t) = \frac{125 \times 24}{(24 + 101)e^{-0,2t}}$$

e na tabela observa-se

t	N
0	24
5	49,1

resultando $N(5) - N(0) = 25,1$.

Para outros valores de A obtêm-se os resultados:

$A = 23$

t	N
0	23
5	47,5

24,5

$A = 22$

t	N
0	22
5	45,9

23,9

$A = 21$

t	N
0	21
5	44,3

23,3

$A = 20$

t	N
0	20
5	42,6

22,6

R.: Atendendo a que existe uma única solução (de acordo com o enunciado), $A = 21$ parece ser o valor que melhor traduz esta situação.

4.

4.1

4.1.1 $0 <$ diâmetro da esfera < 2 logo,
$0 <$ raio da esfera < 1.

R.: $]0, 1[$.

4.1.2

Volume da esfera de raio x: $\frac{4}{3}\pi x^3$.

Aresta do cubo: $a = 2 - 2x$

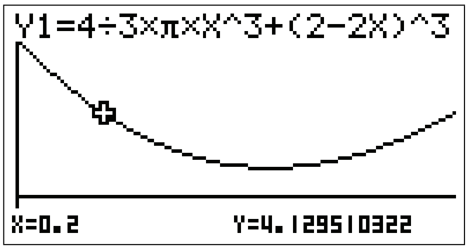
Volume do cubo: $(2-2x)^3$

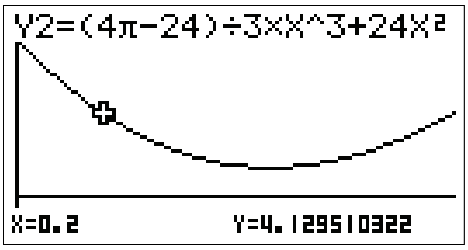
Volume da escultura: $\dfrac{4}{3}\pi x^3 + (2-2x)^3 = V(x)$.

Falta, agora, mostrar que esta expressão é equivalente à do enunciado. Podemos fazê-lo recorrendo à calculadora ou analiticamente.
Introduzindo na calculadora, editor de funções, as expressões

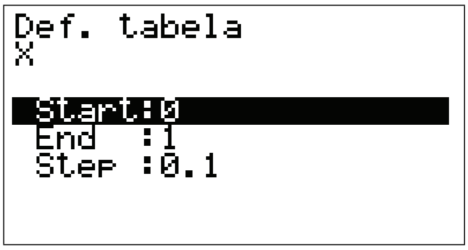
$$Y_1 = \frac{4}{3}\pi x^3 + (2-2x)^3 \qquad \text{e} \qquad Y_2 = \left(\frac{4\pi - 24}{3}\right)x^3 + 24x^2 - 24x + 8,$$

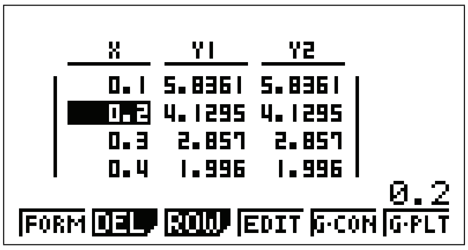
verifica-se a sobreposição dos dois gráficos. Utilizando o cursor podemos confirmar a igualdade das coordenadas de vários pontos das duas funções.





A mesma igualdade também pode ser observada recorrendo a uma tabela com alguns valores:





Duas funções cúbicas que coincidem em, pelo menos 4 pontos são idênticas. Assim, o volume da escultura pode ser definido pela expressão dada no enunciado.

Resolução analítica.

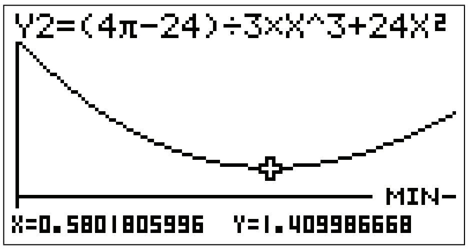
$$V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + (8 - 24x + 24x^2 - 8x^3) \Leftrightarrow V(x) = \left(\frac{4}{3}\pi - 8\right)x^3 + 24x^2 - 24x + 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V(x) = \left(\frac{4\pi - 24}{3}\right)x^3 + 24x^2 - 24x + 8.$$

Como se queria mostrar.

Cálculos auxiliares.

$$(2-2x)^3 = (2-2x)^2(2-2x) = (4 - 8x + 4x^2)(2-2x) =$$
$$= 8 - 8x - 16x + 16x^2 + 8x^2 - 8x^3 = 8 - 24x + 24x^2 - 8x^3.$$

4.1.3 Pela visualização do gráfico da função volume confirmamos que existe um mínimo igual a $1,41$, para $x = 0,58$. Assim, o volume da escultura é mínimo se o raio da esfera for $= 0,58$ metros e a aresta do cubo igual a $0,84$ metros $(2 - 2 \times 0,58)$.



4.2

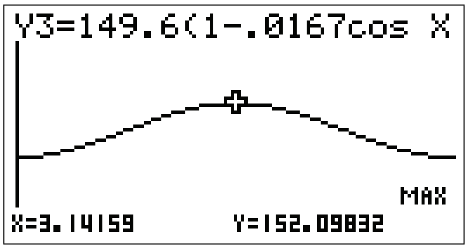
raio da esfera $= 0,5$m;
aresta do cubo $= 1$m;
área da superfície esférica $= 4\pi \cdot (0,5)^2 \approx 3,142\text{m}^2$;
área das cinco faces do cubo $= 5 \times 1 = 5\text{m}^2$;
área total $= 8,142\text{m}^2$
1 lata $\longrightarrow 2,5\text{m}^2$;
2 latas $\longrightarrow 5\text{m}^2$;
3 latas $\longrightarrow 7,5\text{m}^2$ (insuficiente);
4 latas $\longrightarrow 10\text{m}^2$;
R.: Será necessário comprar 4 latas de tinta.

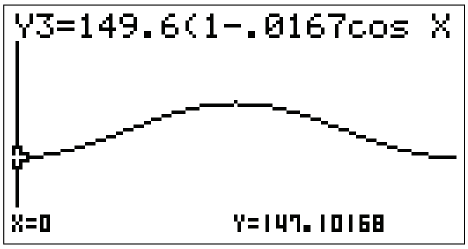
5.

5.1 A distância mínima da Terra ao Sol verifica-se no periélio, para $x = 0$. Esta distância é igual a $d = 149,6(1 - 0,0167\cos 0) \approx 147,1$ milhões de quilómetros.

A distância máxima da Terra ao Sol verifica-se para $x = \pi$, por observação da figura, e é dada por $d = 149,6(1 - 0,0167\cos\pi) \approx 152,1$ milhões de quilómetros.

Podemos também obter estes valores graficamente:





5.2

5.2.1 Para $x = \pi$, tem-se

$$\frac{2\pi t}{T} = \pi - 0,0167\text{sen}\,\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow 2\pi t = \pi T \Leftrightarrow 2t = T \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}.$$

A Terra demora metade de um ano $(365,24/2)$ a descrever metade da órbita.

5.2.2

$$\begin{tikzcd} t=0 \arrow[r] & 4 \text{ Janeiro} \arrow[d] \\ t=41 & 14 \text{ Fevereiro} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

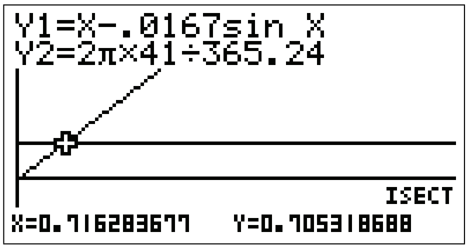
$x = ?$

$$\frac{2\pi \times 41}{365,24} = x - 0,0167 \operatorname{sen} x$$

Considerando

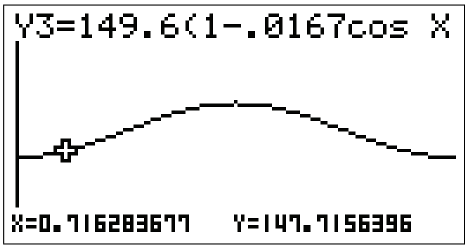
$$Y_1 = x - 0,0167 \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad Y_2 = \frac{2\pi \times 41}{365,24}$$

pretende-se determinar a intersecção dos dois gráficos.



Obtém-se $x \approx 0,71628$. Logo, $d = 149,6(1 - 0,0167 \cdot \cos(0,71628)) \approx 147,7$ milhões de quilómetros.

Cálculo de d (outro processo).
Inserir a função d em Y_3 e procurar a ordenada do ponto de abcissa $x = 0,71628$.



6.

$$\text{T.m.v}_{[2;3,5]} = \frac{81,5-85}{3,5-2} = -2,333 \text{ °C/min}$$

$$\text{T.m.v}_{[2,3]} = \frac{82,6-85}{3-2} = -2,4 \text{ °C/min}$$

$$\text{T.m.v}_{[2;2,5]} = \frac{83,8-85}{2,5-2} = -2,4 \text{ °C/min}$$

De acordo com os valores obtidos, estima-se que a taxa de variação instantânea da temperatura da água no instante $t = 2$ possa ser $-2,4$ °C/min. Tendo em conta a fórmula dada no enunciado e que $T(2) = 85$ e $A = 25$,

$$-2,4 = k(85-25) \Leftrightarrow -2,4 = 60k \Leftrightarrow k = -\frac{2,4}{60} \Leftrightarrow k = -0,04.$$

R.: $k = -0.04$.