1 Ponto 115 - Física - 2004 1^a fase

GRUPO I

As respostas referem-se à versão 1

1.(C)

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (t-1)^2\,\vec{e}_x + (t-1)\,\vec{e}_y \\
\frac{d\vec{r}}{dt} &= 2\,(t-1)\,\vec{e}_x + \vec{e}_y \\
\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= 2\vec{e}_x.
\end{aligned}$$

A aceleração da partícula é constante, de onde, utilizando a 2.^{a} lei de Newton, se conclui que a resultante das forças que actuam na partícula é constante. A resposta correcta é (C).

2. (D)

Considerando um sistema de eixos com origem no ponto de lançamento, em que o eixo dos x é horizontal e aponta para a direita e o eixo dos y é vertical e aponta para cima, as equações que exprimem as componentes da posição, velocidade e aceleração do projéctil são

$$\begin{aligned}
x &= 0 \\
y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\
v_x &= v_{0x} \\
v_y &= v_{0y} - gt \\
a_x &= 0 \\
a_y &= -g.
\end{aligned}$$

Aqui v_{0x}, v_{0y}, são as componentes da velocidade inicial do projéctil segundo os eixos dos x e dos y, respectivamente e a_x e a_y são as componentes da aceleração segundo os mesmos eixos. g é o módulo da aceleração da gravidade. A aceleração é portanto constante ao longo do movimento. O único gráfico que apresenta um valor constante para o módulo da aceleração é (D).

3. (A)

As forças aplicadas no automóvel são apenas a força exercida pela pista e normal a esta $\vec{N}$ e o peso do automóvel $\vec{P}$. Utilizando a 2,^{a} lei de Newton, obtemos:

$$\vec{N} + \vec{P} = \vec{F}_c,$$

em que $\vec{F}_c$ é a força resultante que actua no automóvel e é centrípeta. Utilizando um sistema de eixos em que um eixo (r) tem a direcção radial e sentido para o centro da trajectória circular e o outro (z) é vertical e aponta para cima, obtemos a partir da equação vectorial anterior as seguintes equações escalares:

$$\begin{aligned}
N\sin\theta &= F_c \\
N\cos\theta - P &= 0.
\end{aligned}$$

Utilizando $P = mg$ e dividindo, membro a membro, a primeira equação pela segunda,

$$\tan\theta = \frac{F_\mathrm{c}}{mg}$$

e

$$F_\mathrm{c} = mg\tan\theta$$

A resposta correcta é, portanto, (A).

4. (C)

Vamos chamar $\vec{v}_{\mathrm{A}\,i}$ e $\vec{v}_{\mathrm{A}\,f}$ aos valores da velocidade da partícula A antes e depois da colisão e $\vec{v}_{\mathrm{B}\,i}$ e $\vec{v}_{\mathrm{B}\,f}$ aos correspondentes valores da partícula B.

A equação que exprime a conservação do momento linear total do sistema das duas partículas é

$$m_\mathrm{A}\vec{v}_{\mathrm{A}\,i} + m_\mathrm{B}\vec{v}_{\mathrm{B}\,i} = m_\mathrm{A}\vec{v}_{\mathrm{A}\,f} + m_\mathrm{B}\vec{v}_{\mathrm{B}\,f}$$

ou

$$4,0m\vec{e}_x = m\vec{v}_{\mathrm{A}\,f} + 3,0m\vec{e}_x + 2,0m\vec{e}_y,$$

de onde

$$m\vec{v}_{\mathrm{A}\,f} = \vec{p}_\mathrm{A} = 1,0m\vec{e}_x - 2,0m\vec{e}_y$$

Por outro lado o valor do mometo linear da partícula B após o choque é

$$\vec{p}_\mathrm{B} = 3,0m\vec{e}_x + 2,0m\vec{e}_y$$

e da observação dos diagramas conclui-se que a resposta correcta é (C).

5. (E)

Como podemos supor que os aros são finos, o momento de inércia de cada roda é dado por $I = mr^2$, em que m é a massa da roda e r o seu raio. A relação entre os módulos da força exercida em cada roda F e respectivo momento em relação ao eixo de rotação τ é $\tau = rF$. Combinando agora esta relação com a relação entre o módulo do momento da força e o módulo da acelereção angular da roda $\tau = I\alpha$, obtemos

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{rF}{I} \\ &= \frac{F}{mr}.\end{aligned}$$

Como a quantidade $\dfrac{F}{m}$ é igual para as duas rodas, a aceleração angular tem módulo menor no caso da roda de maior raio, pelo que esta demorará mais tempo a parar e a resposta correcta é (E).

6. (D)

A força que actua no satélite é a força da gravidade da Terra e é centrípeta. Como o movimento é suposto circular, a acelaração do satélite é, em módulo,

$$a = \frac{v^2}{r},$$

em que v é o módulo da velocidade do satélite e r o raio da trajectória ($r = r_\mathrm{T} + h$), em que r é o raio da trajectória do satélite, r_T é o raio da Terra e h é a altitude da trajectória. Utilizando a 2.^{a} lei de Newton, na forma escalar

$$F = m_\mathrm{S} a,$$

em que F é o módulo da força que é exercida no satélite e m_S a massa deste. A força é a força da gravidade entre a Terra e o satélite, ou

$$G\frac{m_\mathrm{T} m_\mathrm{S}}{r^2} = m_\mathrm{S} a,$$

de onde

$$\begin{aligned} a &= G\frac{m_\mathrm{T}}{r^2} \\ &= G\frac{m_\mathrm{T}}{(r_\mathrm{T} + h)^2} \end{aligned}$$

e a resposta correcta é (B).

GRUPO II

1.

1.1. A direcção é definida em cada instante pela posição da partícula e pelo centro da trajectória (é radial), sendo o sentido para o centro (a força resultante é centrípeta).

1.2. O módulo da força centrípeta, que é a resultante das forças que actuam na partícula, é

$$\begin{aligned} F_\mathrm{C} &= \frac{mv^2}{r} \\ &= \frac{m4\pi^2 r^2}{rT^2} \\ &= 4\pi^2\frac{mr}{T^2} \\ &= 4\pi^2\frac{1.0 \times 10^{-2} \times 20 \times 10^{-2}}{2.0^2} \\ &= 2,0 \times 10^{-2}\ \mathrm{N}. \end{aligned}$$

1.3.

O momento angular da partícula em relação ao centro da trajectória é dado pela expressão

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

em que $\vec{r}$ é o vector posição da partícula em relação ao centro da trajectóriae $\vec{p}$ o momento linear da partícula. Este tem sempre a direcção horizontal, tangente à trajectória e no sentido do movimento. O vector $\vec{r}$ é perpendicular a $\vec{p}$ e também horizontal. Consequentemente, na situação do problema, $\vec{L}$ tem a direcção vertical e aponta para cima., ou seja.

1.4 Em módulo,

$$\begin{aligned}
\left|\vec{L}\right| &= L \\
&= rp \\
&= rmv \\
&= rm\frac{2\pi r}{T} \\
&= 2\pi m r^2 f \\
&= 2\pi m f \ell^2 \sin^2\theta \\
&= 2\pi m f \left(\ell \sin\theta\right)^2 .
\end{aligned}$$

Aqui, p é o módulo do momento linear da partícula, v é o módulo da velocidade da partícula, m é a massa da partícula, r o raio da trajectória, T o período do movimento e f a frequência ($f = 1/T$).

2.
2.1.

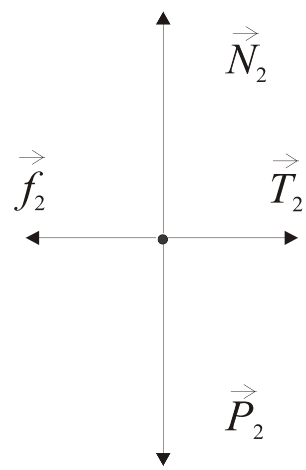

Figura 1:

Legenda:
$\vec{N}_2 \rightarrow$ Componente normal da força exercida no bloco 2 pela superfície em que assenta;
$\vec{P}_2 \rightarrow$ Peso do corpo 2;
$\vec{f}_2 \rightarrow$ Força de atrito exercida no corpo 2 pela superfície em que assenta (componente tangencial da força exercida no corpo 2 pela superfície em que assenta);
$\vec{T}_2 \rightarrow$ Força exercida no corpo 2 pela corda que une os dois pontos (Tensão da corda no ponto de contacto com o corpo).

2.2 Isolando o corpo 2, a 2.^{a} lei de Newton exprime-se na forma:

$$\vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{P}_2 + \vec{f}_2 = \vec{0}.$$

Escolhendo agora um referencial em que o eixo dos x é horizontal e aponta para a direita e o eixo dos y é vertical apontando para cima, obtemos as correspondentes equações escalares:

$$\begin{aligned} N_2 - P_2 &= 0 \quad (1) \\ T_2 - f_2 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

A estas equações acrescentamos a que relaciona o módulo da força de atrito com o módulo da componente normal da força exercida pela superfície no corpo:

$$f_2 = \mu N_2, \quad (3)$$

em que μ é o coeficiente de atrito entre a superfície e o corpo 2.

Isolando agora o corpo 1, obtemos a seguinte equação exprimindo a 2.^{a} lei de Newton:

$$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 = \vec{0},$$

em que $\vec{T}_1$ é a tensão da corda no ponto de contacto com o corpo 1 e $\vec{P}_1$ é o peso deste corpo. Escolhendo como referencial um eixo vertical dirigido para baixo, obtemos a respectiva equação escalar

$$-T_1 + P_1 = 0. \quad (4)$$

A estas quatro equações podemos acrescentar a seguinte:

$$T_1 = T_2, \quad (5)$$

visto que a massa da corda e da roldana são desprezáveis.

Combinando as equações (1) e (3), obtemos

$$T_2 = \mu N_2, \quad (6)$$

e, utilizando as equações (1), (4) e (5),

$$P_1 = \mu P_2,$$

de onde

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{P_1}{P_2} \\ &= \frac{m_1}{m_2}. \end{aligned}$$

2.3. Nesta situação, a equação que exprime a 2.^{a} lei de Newton para o corpo 1 é:

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{f}_1 = m_1 \vec{a}_1,$$

em que os vectores têm significados análogos aos do problema anterior e $\vec{a}_1$ é a aceleração do corpo 1. Escolhendo um referencial idêntico ao do problema anterior, obtemos as equações escalares

$$\begin{aligned} N_1 - P_1 &= 0 \quad (7) \\ T_1 - f_1 &= m_1 a_1 \quad (8) \end{aligned}$$

a que acrescentaremos

$$f_1 = \mu N_1 \tag{9}$$

No que diz respeito ao corpo 2, a equação que exprime a 2.^{a} lei de Newton é:

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

a que corresponde, analogamente ao problema anterior, a equação escalar

$$P_2 - T_2 = m_2 a_2. \tag{10}$$

A estas equações acrescentamos as seguintes duas equações

$$T_1 = T_2 = T \tag{11}$$

e

$$a_1 = a_2 = a. \tag{12}$$

Combinando estas equações, obtemos, de (9) e (1),

$$f_1 = \mu m_1 g = \frac{m_1^2}{m_2} g.$$

Da equação (1) obtemos

$$T = m_1 a + \frac{m_1^2}{m_2} g, \tag{13}$$

que, combinando com a equação (10), conduz a

$$m_2 g - T = m_2 a$$

ou

$$a = g - \frac{T}{m_2}.$$

Substituindo na equação (13), obtemos

$$\begin{aligned} T &= m_1 g - \frac{m_1}{m_2} T + \frac{m_1^2}{m_2} g \\ T\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) &= m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) g \\ T &= m_1 g. \end{aligned}$$

Substituindo $m_1 = 0,60$ kg e $g = 10$ m s^{-2}, obtemos

$$T = 6,0 \text{ N}.$$

2.4. Se a massa da roldana não for considerada desprezável, a massa total do sistema aumenta, mantendo-se os valores as forças exteriores que actuam no sistema, consequentemente a aceleração terá um valor inferior ao que tem quando a massa da roldana é desprezável.

Outra justificação poderá ser obtida a partir do teorema da energia cinética. Se a massa da roldana não é desprezável, a roldana em movimento terá energia cinética, cujo aumento absorverá uma parte do trabalho das forças exteriores (que é igual ao da situação anterior), consequentente a variação da velocidade será menor num determinado intervalo de tempo, o que equivale a dizer que a aceleração será menor.

3.

3.1. A força magnética que actua num electrão no instante em que entra na câmara é dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

em que q é a carga do electrão, $\vec{v}$ a sua velocidade no instante em que entra na câmara e $\vec{B}$ o campo magnético no interior desta.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -1,6 \times 10^{-19} \times \left(-4,0 \times 10^{4}\vec{e}_x\right) \times \left(-2,2 \times 10^{-5}\vec{e}_z\right) \\ &= 1,4 \times 10^{-19}\vec{e}_y \text{ N.}\end{aligned}$$

Aqui utilizámos

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y.$$

3.2. A força que actua no electrão é, em cada instante de módulo constante e perpendicular à direcção da velocidade, logo a velocidade do electrão não varia em módulo e o movimento é circular uniforme.

3.3. Nas condições do enunciado, o raio da trajectória r é

$$r = \frac{d}{2}.$$

Como a força é centrípeta e de módulo constante,

$$F_{\mathrm{C}} = \frac{mv^2}{r},$$

de onde, utilizando $r = d/2$,

$$d = \frac{2mv^2}{F_{\mathrm{C}}},$$

ou, utilizando

$$F_{\mathrm{C}} = qvB,$$

obtemos

$$\begin{aligned}d &= \frac{2mv^2}{qvB} \\ &= \frac{2mv}{qB}.\end{aligned}$$

3.4. Da expressão

$$qvB = \frac{mv^2}{r},$$

obtemos

$$qB = \frac{mv}{r}.$$

Mas $v = \dfrac{2\pi r}{T}$, em que T é o intervalo de tempo necessário para uma volta completa. Obtemos assim

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

O intervalo de tempo durante o qual cada electrão permanece dentro da câmara é metade deste valor, isto é,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi m}{qB} \\ &= \frac{\pi \times 9,1 \times 10^{-31}}{1,6 \times 10^{-19} \times 2,3 \times 10^{-5}} \\ &= 7,8 \times 10^{-7} \text{ s.} \end{aligned}$$

3.5 A força eléctrica resultante deve equilibrar a força magnética sobre o electrão, de modo que a resultante seja nula. Como a força eléctrica sobre o electrão é dada por $\vec{F}_\mathrm{E} = q\vec{E}$, em que q é a carga do electrão e $\vec{E}$ o campo eléctrico, este deve ter a direcção e sentido do eixo dos y, uma vez que $q < 0$. Em valor absoluto a força eléctrica deverá ser igual à força magnética, ou

$$F_\mathrm{E} = qvB.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} E &= \frac{F_\mathrm{E}}{q} \\ &= vB, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} \vec{E} &= vB\vec{e}_y \\ &= 4,0 \times 10^4 \times 2,2 \times 10^{-5}\vec{e}_y \\ &= 0,88\vec{e}_y \text{ (V m}^{-1}). \end{aligned}$$

GRUPO III

1. Foi a força de pressão exercida no fundo do vaso, visto que é a mesma para a mesma altura de líquido. A massa e o peso do líquido varia nas três situações apresentadas.

2. A experiência mostra que a força de pressão na base do vaso é igual nos três casos considerados. O "paradoxo"reside no facto de, apesar de as massas do líquido variarem nos três casos, a força de pressão na base do vaso é igual.

3. A diferença de pressão entre dois pontos no interior de um líquido é igual ao peso de uma coluna de líquido com base unitária e altura igual à diferença de altura entre os dois pontos considerados, isto é, matematicamente:

$$p_2 - p_1 = \rho g h,$$

em que ρ é a massa volúmica do líquido, g é a aceleração da gravidade e h a diferença de altura entre os dois pontos considerados.

4. Da lei fundamental da hidrostática resulta a expressão

$$pA = p_0 A + \rho g h A,$$

em que p_0 é a pressão na superfície livre do líquido e p a pressão num ponto do interior do líquido a uma distância h da superfície líquida, medida na vertical.

No nosso caso,

$$(p - p_0)\, A = ghA$$

e podemos interpretar $(p - p_0)\, A$ como a força de pressão na base de um vaso resultante de existência de um líquido com altura h. Na realidade, o dispositivo mede $(p - p_0)\, A$ porque a pressão atmosférica é exercida tanto na superfície livre do líquido como na membrana no fundo da vaso, na parte exterior. A curva (que neste caso é uma recta) representa o valor de $(p - p_0)\, A$ quando se varia h. O declive da recta é igual, portanto, a $\rho g A$.

Tomando os pontos (0,0) (que faz parte da recta porque quando $h = 0$ cm, $f = 0$ N) e $h = 150$ mm a que corresponde $(p - p_0)\, A = 0,63$ N, obtemos

$$\rho g A = \frac{0,62}{0,15}$$

ou

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{0,62}{0,15} \times \frac{1}{10 \times 3,98 \times 10^{-4}} \\ &= 1,0 \times 10^{3} \text{ kg m}^{-3}. \end{aligned}$$